

M.F.

Liceo Scientifico e Scientifico - tecnologico Brocca

LA PROVA SCRITTA DI FISICA

Materiali e riflessioni sulle prove scritte assegnate all'Esame di Stato

*I testi delle prove, le soluzioni, l'analisi dei temi affrontati, le indicazioni didattiche***pagine a cura di Paolo Cavallo**

La Fisica ha costituito fino ad oggi l'argomento della Seconda Prova Scritta all'Esame di Stato per i corsi sperimentali del Progetto Brocca negli anni scolastici dal 1996/97 al 1999/2000. Abbiamo riprodotto in questo sito quelle prove. Abbiamo inoltre scelto di discutere anche le prove assegnate negli anni dal 1994/95 al 1996/97 in altri corsi sperimentali, nella speranza che possano costituire ulteriori elementi utili di documentazione.

Dal seguente quadro riassuntivo si possono raggiungere le pagine dedicate alle singole prove:

1. [1994/1995 Maturità Scientifica sperimentale](#)
2. [1995/1996 Maturità Scientifica sperimentale](#)
3. [1996/1997 Maturità Scientifica sperimentale \(a\)](#)
4. [1996/1997 Maturità Scientifica sperimentale, Progetto Brocca a indirizzo Scientifico-Tecnologico \(b\)](#)
5. [1997/1998 Maturità Scientifica sperimentale Progetto Brocca a indirizzo Scientifico](#)
6. [1998/1999 Esame di Stato di Liceo Scientifico, indirizzo Scientifico-Tecnologico Progetto Brocca](#)
7. [1999/2000 Esame di Stato di Liceo Scientifico, indirizzo Scientifico Progetto Brocca](#)

In ogni pagina si trovano il testo della prova, la soluzione discussa anche dal punto di vista didattico, indicazioni di studio e indicazioni di possibili esercizi di preparazione.

Interventi

Potete porre domande, fornire contributi e offrire spunti di discussione partecipando nella sezione [Interventi](#).

Le prove e gli argomenti trattati

Nelle diverse prove, il tema principale resta negli anni l'Elettromagnetismo. Compiono però anche alcuni argomenti, tratti dal curriculum tradizionalmente svolto in terza e in quarta. Inoltre, vengono proposti anche temi di "fisica moderna". Per avere un quadro più preciso, possiamo analizzare le diverse prove e gli argomenti trattati in ciascuna di esse servendoci di una tabella.

Temi	Prove d'esame						
	94/95	95/96	96/97 (a)	96/97 (b)	97/98	98/99	99/00
Elettromagnetismo							
Elettrostatica						✓	
Circuiti e correnti continue	✓		✓			✓	✓
Energia elettrica e f.e.m.						✓	✓
Magnetismo	✓	✓			✓		

Induzione elettromagnetica			✓				
Moto di cariche in campi e.m.		✓			✓	✓	
Fisica moderna							
Radioattività		✓			✓		
Effetto fotoelettrico			✓	✓	✓		
Concetto di fotone			✓	✓	✓		✓
Esistenza di una velocità limite					✓		
Equivalenza massa-energia					✓		
Modelli atomici						✓	
Dualismo onda-particella							✓
Relazioni di indeterminazione							✓
Energia meccanica e termica							
Lavoro meccanico			✓				
Energia potenziale	✓					✓	
Energia cinetica		✓				✓	
Potenza	✓			✓			✓
Calore e temperatura	✓			✓		✓	
Rendimento	✓						✓
Ottica							
Riflessione e rifrazione		✓					
Interferenza					✓		
Laboratorio e informatica							
Formulazione di una relazione			✓	✓			
Progettazione di esperienze							✓
Diagrammi di flusso e programmi				✓			

Come si può vedere, il ventaglio dei temi trattati è piuttosto ampio. È difficile, quindi, tentare di prevedere una linea di tendenza. Possiamo soltanto azzardare alcune considerazioni.

- Fra i temi dell'elettromagnetismo, compaiono con maggiore frequenza quelli relativi allo studio dei *circuiti elettrici* e quelli legati al *moto delle cariche elettriche* nei campi costanti nel tempo e uniformi, in particolare nei campi magnetici.
- Fra i temi di fisica moderna, si presenta come centrale il concetto di *fotone*, in particolare in relazione all'*effetto fotoelettrico*.
- I richiami a contenuti presumibilmente svolti negli anni precedenti convergono sul concetto di *energia* e sui concetti ad esso legati, come quello di *potenza* o di *temperatura*.
- I temi di *ottica* compaiono soltanto occasionalmente. Mentre il concetto di *lunghezza d'onda* risulta rilevante anche nel contesto delle onde elettromagnetiche e in quello del dualismo onda-corpuscolo, e si può quindi immaginare un futuro richiamo a temi di ottica ondulatoria, il richiamo all'ottica geometrica è avvenuto soltanto una volta.
- L'invito a svolgere la trattazione o parte di essa nella forma di una relazione di *laboratorio*, o con riferimento a possibili *procedure sperimentali*, non è stato rivolto regolarmente, ma va comunque preso in considerazione come possibile elemento di giudizio.

Questo è forse tutto quello che possiamo affermare in maniera generale. Per una analisi più dettagliata, e per specifiche indicazioni didattiche, è necessario prendere in esame le singole prove. È quello che facciamo nelle pagine ad esse dedicate.

Buon lavoro e... *in bocca al lupo!*

Se hai aperto i materiali da una pagina del sito Zanichelli chiudi questa finestra per tornare dov'eri.
Se provieni dall'esterno puoi usare questo link per visitare Zanichelliscuola.

ESAMI DI MATURITÀ SCIENTIFICA SPERIMENTALE 1995

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Tema di Fisica

In un laboratorio un ago magnetico è libero di ruotare ed è collocato al centro di una spira circolare di rame posta in posizione verticale e avente raggio 5 cm. In condizione di equilibrio, se nella spira non passa alcuna corrente, la direzione dell'ago coincide con la proiezione verticale della spira.

Il candidato calcoli in tesla la componente orizzontale dell'induzione magnetica terrestre all'interno del laboratorio avendo osservato che, quando la spira è attraversata dalla corrente d'intensità 1 A, l'ago effettua una rotazione formando un angolo di 25 gradi con il piano della spira.

Quesito di Fisica

In un cantiere si devono sollevare carichi da 50 kg ciascuno a 20 metri di altezza ma, per un guasto al sistema elettrico, è necessario ricorrere ad un motore in cc alimentato da una batteria nuova di automobile da 12 V e 40 Ah.

Il candidato valuti la potenza minima accettabile per il motore e calcoli il numero di carichi che potranno essere sollevati prima di esaurire la batteria, sapendo che:

1. la batteria è nuova e perfettamente carica,
2. il motore impiega un minuto per sollevare ciascun carico,
3. il sistema ha un rendimento del 60%.

La soluzione

Tema di Fisica

Quando nella spira non passa alcuna corrente, la direzione dell'ago coincide evidentemente con quella della componente orizzontale del campo magnetico terrestre \vec{B}_0 , o induzione magnetica terrestre. A questo proposito, conviene notare come il termine tradizionale di "induzione magnetica" per indicare il campo \vec{B} , anche se perfettamente corretto, sta scomparendo dall'uso corrente almeno nella Scuola Secondaria; forse è bene prendere in considerazione la possibilità che gli studenti lo incontrino in un contesto come questo, e segnalare loro in qualche occasione la doppia denominazione. È importante fare in modo che non si corra il pericolo di fraintendimento con il fenomeno dell'*induzione elettromagnetica*, che è naturalmente del tutto differente.

Al passare di una corrente continua i nella spira, si stabilisce all'interno di questa un ulteriore campo magnetico \vec{B}_S generato dalla corrente stessa. Nei punti sull'asse della spira tale campo magnetico è diretto lungo l'asse e quindi è perpendicolare al campo \vec{B}_0 . La sua intensità è data dall'espressione:

$$B(y) = \frac{\mu_0 i R^2}{2\sqrt{(R^2 + y^2)^3}} \quad (1)$$

dove R è il raggio della spira e y è la distanza del punto sull'asse dal centro della spira.

Si tratta di un'espressione ben nota e di notevole importanza. Per ricavarla, occorre integrare sulla spira il contributo $d\vec{B}$ di ogni elemento di lunghezza ds , contributo dato dalla legge di Biot-Savart. Non è certo una derivazione alla portata di un normale candidato all'Esame, per cui bisogna concludere che l'estensore della prova ipotizzasse che il candidato sapesse citare la formula a memoria.

L'ago magnetico si trova nel piano della spira, per cui $y = 0$. L'intensità del campo magnetico in tale posizione risulta:

$$B_S = \frac{\mu_0 i}{2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot 1\text{A}}{2 \cdot 0,05 \text{ m}} = 12,6 \mu\text{T}. \quad (2)$$

È difficile dare una regola certa per il numero di cifre significative con cui va espresso il risultato delle operazioni numeriche. Il testo fornisce dati interi, che sembrano avere il significato di valori puramente teorici, senza limiti di precisione. In queste condizioni, sembra ragionevole suggerire di esprimere il risultato con tre o quattro cifre significative.

All'equilibrio, l'ago magnetico si disporrà parallelamente alla direzione del campo magnetico totale, dato dalla somma vettoriale:

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_0 + \vec{B}_S. \quad (3)$$

I vettori \vec{B}_0 e \vec{B}_S rappresentano i cateti di un triangolo rettangolo avente ipotenusa uguale a \vec{B}_{tot} . Il testo afferma che l'angolo opposto al cateto \vec{B}_S vale 25° . Di conseguenza, il rapporto fra i due cateti dev'essere uguale alla tangente trigonometrica di tale angolo:

$$\tan(25^\circ) = \frac{B_S}{B_0}$$

da cui ricaviamo il valore di B_0 , come richiesto:

$$B_0 = \frac{B_S}{\tan(25^\circ)} = \frac{12,6 \mu\text{T}}{0,466} = 26,9 \mu\text{T}. \quad (4)$$

Quesito di Fisica

La potenza che deve avere il motore richiesto può essere ricavata dalla condizione 2. Se il motore solleva un carico di 50 kg ad un'altezza di 20 m in un minuto, deve fornire una potenza utile pari almeno a:

$$P_u = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \circ \Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{m g \Delta h}{\Delta t} = \frac{50 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20 \text{ m}}{60 \text{ s}} = 163 \text{ W}. \quad (5)$$

La potenza utile è una frazione, pari al 60%, della potenza totale P_t erogata dalla batteria al motore:

$$P_t = \frac{P_u}{60\%} = \frac{163 \text{ W}}{0,60} = 272 \text{ W}. \quad (6)$$

Il motore si comporta come un carico resistivo in corrente continua che assorbe una potenza P_t quando ai suoi capi è stabilita una differenza di potenziale $\Delta V = 12 \text{ V}$. Possiamo applicare perciò la relazione di Joule

$$P = \Delta V \cdot I$$

per determinare la corrente I assorbita dal motore:

$$I = \frac{P_t}{\Delta V} = \frac{272 \text{ W}}{12 \text{ V}} = 22,7 \text{ A}. \quad (7)$$

La batteria è in grado di erogare una quantità di carica Q complessivamente pari a una corrente di intensità 40 A che fluisce per 1 ora:

$$Q = 40 \text{ A} \cdot 3600 \text{ s} = 144 \text{ kC}.$$

Se il motore assorbe una corrente di 22,7 A, il tempo impiegato dalla batteria per esaurirsi risulta

$$\Delta t = \frac{Q}{I} = \frac{144 \text{ kC}}{22,7 \text{ A}} = 6344 \text{ s} = 106 \text{ min}. \quad (8)$$

Poiché il motore solleva un carico al minuto, questo è anche il numero di carichi sollevati.

A questo punto è indispensabile muovere al testo un'osservazione che non dovrebbe mancare neppure nello svolgimento del quesito da parte del candidato. Il problema è stato risolto in base alle ipotesi del testo, ma è necessario far notare che tali ipotesi sono del tutto irrealistiche. È necessario infatti ipotizzare che la batteria continui a erogare la corrente I e a stabilire la differenza di potenziale ΔV da noi calcolate per tutta la durata del suo funzionamento. Ora, noi sappiamo che questo non è possibile. Se il regime da noi determinato può venire realizzato all'inizio, quando la batteria "è nuova e perfettamente carica", ben presto la batteria inizierà a perdere efficienza e i valori effettivi di corrente

e tensione caleranno progressivamente. L'idea di una batteria che funziona in maniera ideale fino ad esaurirsi all'improvviso costituisce una schematizzazione poco realistica, necessaria a risolvere il problema, ma tale da rendere poco significativo in pratica il risultato ottenuto.

Lo stesso problema può essere risolto per un'altra strada. La batteria può essere trattata come un sistema che porta una quantità di carica Q a una differenza di potenziale ΔV , e quindi un sistema che fornisce un'energia potenziale elettrostatica

$$U = Q \cdot \Delta V = 144 \text{ kC} \cdot 12 \text{ V} = 1,73 \text{ MJ.} \quad (9)$$

L'energia è utilizzata dal motore con un'efficienza del 60%, per cui il lavoro complessivamente svolto dal motore risulta:

$$W = 0,60 \cdot U = 0,60 \cdot 1,73 \text{ MJ} = 1,04 \text{ MJ.} \quad (10)$$

Ad ogni carico il lavoro compiuto è $w = m g \Delta h = 9,8 \text{ kJ}$, per cui il numero complessivo di carichi realizzabili risulta:

$$N = \frac{W}{w} = \frac{1,04 \text{ MJ}}{9,8 \text{ kJ}} = 106 \quad (11)$$

risultato che coincide naturalmente con quello (vedi eq. 8) precedentemente ottenuto per altra strada. Per questo secondo metodo, comunque, valgono le stesse osservazioni già esposte a proposito della scarsa plausibilità.

ESAMI DI MATURITÀ SCIENTIFICA SPERIMENTALE 1996

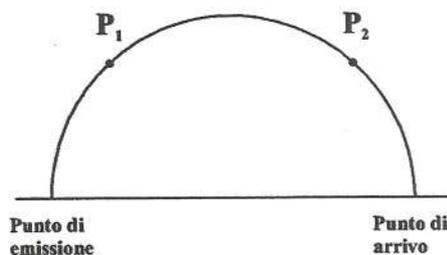
Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Tema 1

Una particella α ($q = 3,2 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 6,7 \cdot 10^{-27}$ kg), emessa da una sostanza radioattiva, descrive nel vuoto una traiettoria semicircolare di raggio $r = 10$ cm a causa di un campo magnetico d'induzione $B = 0,8$ T.

Il candidato calcoli in eV l'energia cinetica con cui è stata emessa la particella e disegni, nei punti P_1 e P_2 , i vettori \vec{v} , \vec{B} , \vec{F} nella figura che descrive la sua traiettoria.



Tema 2

Un recipiente cilindrico, a pareti riflettenti e pieno d'acqua, ha sul fondo, al centro, una sorgente luminosa puntiforme S che emette raggi di luce in tutte le direzioni. Per il fenomeno della riflessione totale, dall'acqua emerge un cono di luce che sulla superficie di separazione acqua-aria ha una sezione luminosa circolare di diametro $d = 20$ cm.

Il candidato calcoli l'indice di rifrazione dell'acqua, sapendo che la sua profondità dentro il recipiente è $h = 88$ mm.

La soluzione

Tema 1

Sia per quanto riguarda l'uso del termine "campo magnetico di induzione", che per quanto riguarda il numero di cifre significative nei risultati numerici, si rimanda ai commenti riportati nella discussione della prova relativa all'anno 1995.

La forza agente su una particella di carica q in moto con velocità \vec{v} in un campo magnetico \vec{B} non è altro che la forza di Lorentz magnetica, data dall'espressione

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

la cui intensità è pari a

$$F = qvB_{\perp} \quad (2)$$

dove B_{\perp} è la componente di \vec{B} perpendicolare a \vec{v} , uguale al prodotto di B per il seno dell'angolo formato da \vec{v} e \vec{B} . Se \vec{B} è uniforme nella regione attraversata dalla particella, la forza di Lorentz ha dappertutto la stessa intensità ed è sempre perpendicolare alla velocità della particella. In altri termini, si comporta come una forza centripeta, sotto la cui azione la particella eseguirà un moto circolare uniforme. La velocità resterà costante in modulo per l'intero moto, in quanto la forza di Lorentz (1) non compie lavoro sulla particella e quindi non ne cambia l'energia.

Il testo della prova non specifica se il campo \vec{B} è uniforme né qual è l'angolo da esso formato con la velocità della particella. Il fatto che si dica che la traiettoria è circolare sembra implicare che il candidato debba dare per scontata la prima ipotesi. Quanto all'angolo, dobbiamo osservare che il problema non risulta determinato se questo va considerato incognito. È ragionevole pensare che anche in questo caso si debba dare per scontata un'ipotesi, vale a dire, che \vec{v} e \vec{B} siano perpendicolari. Questa ipotesi è ragionevole anche perché questa sarebbe la scelta adottata dallo sperimentatore che volesse servirsi della configurazione descritta per misurare l'energia della particella. Poiché il testo della prova non lo fa, il candidato dovrebbe enunciare esplicitamente le due ipotesi.

La forza centripeta in un moto circolare uniforme può essere scritta nella forma:

$$F = m \frac{v^2}{r} \quad (3)$$

dove m è la massa del punto materiale in moto, v la sua velocità e r il raggio della traiettoria. Ponendo la forza di Lorentz (2) uguale alla forza centripeta (3):

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

possiamo ricavare un'espressione che ci permette di calcolare la velocità della particella:

$$v = \frac{qBr}{m} = \frac{3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,8 \text{ T} \cdot 0,10 \text{ m}}{6,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 3,82 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (4)$$

Il valore di v risulta molto inferiore al valore $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ della velocità della luce nel vuoto. Questo giustifica a posteriori la nostra scelta di svolgere una trattazione non relativistica del problema.

Sempre in base a questa osservazione, utilizziamo l'espressione non relativistica per calcolare l'energia cinetica della particella, come richiesto:

$$K_J = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 6,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \left(3,82 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 4,89 \cdot 10^{-14} \text{ J.} \quad (5)$$

Il testo richiede che tale valore sia espresso in elettronvolt. Più che citare semplicemente il valore di un elettronvolt in joule, può essere interessante determinarlo a partire dalla definizione: 1 eV è l'energia potenziale elettrica a disposizione di una particella di carica pari alla carica elementare $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ sottoposta a una differenza di potenziale di 1 V:

$$(1 \text{ eV})_J = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

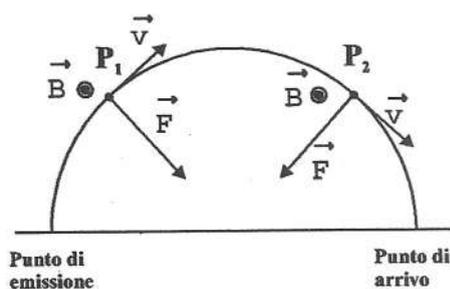
Sostituendo questo valore nella (5) otteniamo il risultato richiesto:

$$K_{eV} = \frac{K_J}{\frac{(1 \text{ eV})_J}{1 \text{ eV}}} = \frac{4,89 \cdot 10^{-14} \text{ J}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}} \cdot 1 \text{ eV} = 3,05 \text{ MeV.} \quad (6)$$

Per quanto riguarda la richiesta di tracciare sulla traiettoria, in due punti predeterminati, i vettori \vec{v} , \vec{F} e \vec{B} , osserviamo semplicemente che:

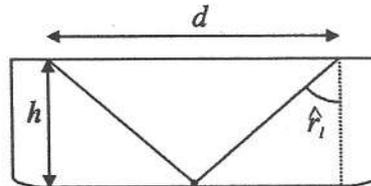
- la velocità deve essere sempre tangente alla traiettoria;
- la forza deve essere sempre radiale e diretta verso il centro della traiettoria;
- tenendo conto del segno della carica e della regola della mano destra, il campo magnetico deve essere uscente dal piano del foglio;
- il modulo di ciascun vettore deve rimanere lo stesso lungo la traiettoria.

Otteniamo perciò la figura seguente:



Tema 2

La situazione descritta dal testo può essere illustrata con il seguente schema:



dove \hat{r}_l è l'angolo limite di rifrazione dall'acqua all'aria (praticamente uguale a quello dall'acqua al vuoto).

Dalla figura ricaviamo immediatamente che:

$$\tan(\hat{r}_l) = \frac{d/2}{h}$$

per cui

$$\hat{r}_l = \arctan\left(\frac{d/2}{h}\right) = \arctan\left(\frac{10 \text{ cm}}{8,8 \text{ cm}}\right) = \arctan(1,136) = 0,849 \text{ rad.} \quad (7)$$

Dalla legge di Snell

$$\sin(\hat{i}) = n \sin(\hat{r}) \quad (8)$$

ponendo $\hat{r} = \hat{r}_l$ e $\hat{i} = \frac{\pi}{2}$ rad si ricava l'indice di rifrazione:

$$n = \frac{1}{\sin(\hat{r})} = \frac{1}{\sin(0,849 \text{ rad})} = \frac{1}{0,751} = 1,33. \quad (9)$$

A rigore, quello che abbiamo ricavato è l'indice di rifrazione dell'acqua *relativo all'aria*. Ma, come è noto, gli indici di rifrazione relativi all'aria differiscono molto poco dagli indici relativi al vuoto, cioè dagli indici di rifrazione *assoluti*. Possiamo quindi affermare che l'indice di rifrazione dell'acqua risulta pari a 1,33, un risultato probabilmente già noto al candidato.

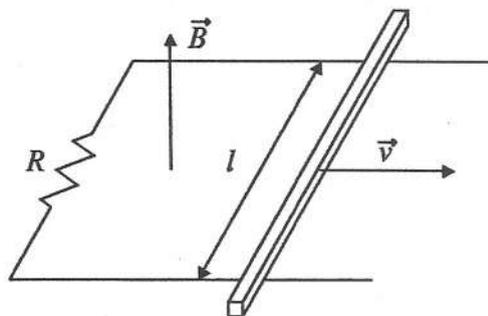
ESAMI DI MATURITÀ SCIENTIFICA SPERIMENTALE 1997

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Temal

Una sbarretta conduttrice scorre su due guide metalliche parallele appoggiate sopra un piano orizzontale. Esse distano tra di loro $l = 20 \text{ cm}$ e sono collegate da un conduttore di resistenza $R = 2 \Omega$. Sapendo che la sbarretta si muove in un campo magnetico con \vec{B} di intensità $0,5 \text{ T}$, perpendicolare al piano ed orientato come in figura, calcolare:



- la d.d.p. indotta agli estremi della sbarretta in mV,
- l'intensità di corrente in mA che l'attraversa,
- la forza di attrito, sapendo che la sbarretta si muove con velocità costante $v = 20 \text{ cm/s}$.

Il candidato presenti la risoluzione sotto forma di relazione scientifica, descrivendo e motivando i passaggi intermedi.

Tema 2

Il candidato spieghi l'effetto fotoelettrico descrivendone almeno un'applicazione. Calcoli poi in eV la massima energia cinetica che possono avere gli elettroni emessi da una superficie investita da una radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ m, sapendo che la lunghezza d'onda di soglia è $\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-7}$ m.

Il candidato presenti la risoluzione sotto forma di relazione scientifica, descrivendo e motivando i passaggi intermedi.

La soluzione

Tema 1

Nella situazione descritta dal testo, il flusso Φ del campo magnetico \vec{B} , attraverso una qualsiasi superficie avente il circuito come bordo, varia nel tempo. In base alla legge di Faraday-Neumann-Lenz, nel circuito si stabilisce allora una *forza elettromotrice indotta* ε_{ind} , la quale produce a sua volta una corrente indotta i_{ind} nel circuito. Il verso della corrente indotta è tale da generare un secondo campo magnetico B' tale da opporsi alla variazione del flusso Φ .

La legge di Faraday-Neumann-Lenz può essere scritta in forma matematica come:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \quad (1)$$

Poiché il campo magnetico \vec{B} attraverso il circuito è uniforme e costante nel tempo, la variazione $\Delta\Phi$ del flusso relativo in un intervallo di tempo Δt è dovuta soltanto alla variazione ΔS dell'area sulla quale si calcola il flusso. Se come area su cui si calcola il flusso viene scelta, come è naturale, l'area del rettangolo delimitato dal resistore di resistenza R , dalla sbarretta e dalle guide metalliche, nell'intervallo Δt quest'area varia, per effetto del moto della sbarretta, di una quantità uguale al rettangolo spazzato dalla sbarretta in movimento. Tale rettangolo ha dimensioni pari rispettivamente a l e $\Delta s = v \cdot \Delta t$, per cui:

$$\Delta S = l \cdot v \cdot \Delta t. \quad (2)$$

La variazione del flusso di \vec{B} risulta pertanto uguale al flusso attraverso ΔS ; ricordando che \vec{B} è uniforme e perpendicolare alla superficie del circuito, e utilizzando la (2):

$$\Delta\Phi = \vec{B} \cdot \Delta\vec{S} = B \cdot \Delta S = B \cdot l \cdot v \cdot \Delta t. \quad (3)$$

Sostituendo la (3) nella (1), otteniamo la seguente espressione della forza elettromotrice indotta:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -B \cdot l \cdot v = -0,5 \text{ T} \cdot 0,20 \text{ m} \cdot 0,20 \text{ m/s} = -20 \text{ mV}. \quad (4)$$

Il segno meno di questo risultato va inteso in questo senso: guardando il circuito dalla direzione individuata dal vettore \vec{B} , la forza elettromotrice indotta genera una corrente che scorre nel circuito in senso negativo, cioè in senso *orario*. In base alla prima regola della mano destra, è facile rendersi conto che tale corrente indotta genera a sua volta un campo magnetico \vec{B}' diretto come \vec{B} ma avente verso opposto. Tale nuovo campo magnetico agisce quindi in modo da *diminuire* il flusso totale attraverso la superficie del circuito, opponendosi all'*aumento* del flusso dovuto al moto della sbarretta. Questo è proprio ciò che prevede la legge di Lenz.

L'intensità della corrente indotta i_{ind} può essere determinata supponendo (come è ragionevole in base al testo) che la resistenza del tratto R sia molto maggiore di quella offerta dal resto del circuito. Possiamo allora supporre che la forza elettromotrice sia praticamente uguale alla caduta di tensione ai capi del resistore, data a sua volta dalla legge di Ohm:

$$\varepsilon_{ind} = R \cdot i_{ind}. \quad (5)$$

Richiamando la (4) e risolvendo la (5) in funzione di i_{ind} giungiamo finalmente al valore:

$$i_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = \frac{20 \text{ mV}}{2 \Omega} = 10 \text{ mA} \quad (6)$$

dove abbiamo ignorato il segno meno che compare nella (4), poiché siamo interessati esclusivamente alle intensità. Il segno avrebbe comunque un significato analogo a quello già discusso: percorrendo il circuito in senso *antiorario*, incontriamo prima il capo del resistore a potenziale più basso.

Sempre ignorando la caduta di tensione nei tratti di guida metallica che chiudono il circuito, la d.d.p. ai capi della sbarretta deve essere uguale alla caduta di tensione ai capi di R , pari dunque a 20 mV.

Questo risultato merita una discussione più approfondita. Possiamo chiederci qual è l'origine della forza elettromotrice che si stabilisce sul circuito. Osserviamo allora che gli elettroni di conduzione presenti nella sbarretta sono in moto rispetto al campo magnetico esterno \vec{B} . Di conseguenza, essi sono soggetti a una forza di Lorentz, data dalla legge:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}, \quad (7)$$

che imprime loro un moto longitudinale alla sbarretta. In questo modo gli elettroni si spostano verso un estremo della sbarretta, così che ai capi di questa viene a stabilirsi la differenza di potenziale da noi determinata. Si potrebbe concludere che sia la forza di Lorentz a compiere lavoro sugli elettroni e in ultima analisi a generare la forza elettromotrice (che è definita, lo ricordiamo, come il rapporto fra il lavoro eseguito sulle cariche e il valore delle cariche stesse). In realtà la faccenda è più complicata, in quanto la forza di Lorentz (7) è ad ogni istante perpendicolare al moto degli elettroni e quindi non può compiere lavoro su di essi. Per un'analisi completa della situazione, sarebbe indispensabile prendere in considerazione le forze di natura elettrica esercitate dal reticolo cristallino sugli elettroni.

Questo non è in definitiva necessario. A compiere davvero lavoro sul sistema è naturalmente la forza esterna \vec{F}_{ext} che tiene in movimento la sbarretta. È questa forza che fornisce l'energia necessaria a far muovere gli elettroni nel circuito, energia che viene loro continuamente sottratta per effetto Joule e quindi, in ultima analisi, per i processi che tendono a far aumentare la temperatura del circuito e in particolare del resistore.

L'effetto Joule può essere quantificato mediante la potenza dissipata al passaggio della corrente attraverso il resistore:

$$P = \Delta V \cdot i. \quad (8)$$

La potenza P deve essere fornita dal lavoro eseguito dalla forza esterna \vec{F}_{ext} sul centro di massa della sbarretta, che si muove alla velocità \vec{v} e in un intervallo Δt esegue uno spostamento $\Delta \vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t$. Poiché la potenza fornita è definita dal rapporto fra il lavoro W eseguito e l'intervallo di tempo impiegato, otteniamo:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\vec{F}_{ext} \circ \Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{F}_{ext} \circ \vec{v} \cdot \Delta t}{\Delta t} = F_{ext} \cdot v. \quad (9)$$

Uguagliando la (8) e la (9) e risolvendo in funzione di F_{ext} otteniamo:

$$F_{ext} = \frac{\Delta V \cdot i}{v} = \frac{20 \text{ mV} \cdot 10 \text{ mA}}{0,20 \text{ m/s}} = 1,0 \text{ mN}. \quad (10)$$

Il testo del problema richiede il calcolo della forza di attrito sulla sbarretta. Non è chiaro quale sia in questo caso l'intenzione dell'estensore della prova. Naturalmente, dato che la sbarretta si muove di moto rettilineo uniforme, la forza totale su di essa deve essere zero. Pertanto, sulla sbarretta deve agire una "forza di attrito" uguale alla forza esterna motrice. Ma qual è la natura fisica di questa forza? Possiamo prendere in considerazione due eventualità:

1. per "forza di attrito" si intende la sola forza $i \cdot \vec{l} \times \vec{B}$ che il campo magnetico imprime sulla sbarretta quando in essa si stabilisce una corrente: per la regola della mano destra, questa forza magnetica si oppone al moto della sbarretta e quindi si oppone alla forza motrice \vec{F}_{ext} , comportandosi come una forza resistente o di attrito;
2. oltre a questa forza resistente di origine magnetica, deve intendersi presente anche una forza di attrito meccanico fra la sbarretta e le guide metalliche su cui scivola; se è presente questa seconda forza di attrito, deve essere presente un'ulteriore forza motrice esterna che la equilibri.

Nell'ipotesi 1. la forza di attrito è uguale e opposta alla forza motrice esterna che sostiene la forza elettromotrice indotta. Abbiamo già quantificato tale forza in 1,0 mN, quindi la forza di attrito vale anch'essa 1,0 mN. Nell'ipotesi 2. il problema è indeterminato. Siamo in grado di determinare la forza esterna necessaria a fornire lavoro elettrico al sistema, ma non sappiamo come determinare la forza necessaria a fornire l'energia cinetica consumata dalla forza di attrito meccanico. In assenza di una "interpretazione autentica", non possiamo andare oltre queste osservazioni, né avrebbe potuto farlo il candidato.

Tema 2

L'effetto fotoelettrico può essere messo in evidenza utilizzando un opportuno tubo a vuoto con due elettrodi connessi a una pila che mantiene fra essi una differenza di potenziale assegnata. Poiché i due elettrodi sono isolati, nel circuito così costituito non passa alcuna corrente. Ma se il catodo (l'elettrodo connesso al polo negativo della pila) è costituito da una piastrina metallica, è possibile far passare una corrente nel circuito illuminando il catodo con una sorgente di radiazione elettromagnetica, visibile o ultravioletta. Finché la lunghezza d'onda della radiazione impiegata è superiore a un certo valore λ_0 , detto lunghezza d'onda di soglia, nel circuito non si osserva alcuna corrente, qualunque sia l'intensità della sorgente impiegata. La corrente passa soltanto se la radiazione ha una lunghezza d'onda uguale o inferiore a λ_0 .

Dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico, questo è effetto è sconcertante. Se nel circuito si stabilisce una corrente, possiamo ipotizzare che il catodo illuminato emetta elettroni, in maniera simile a quello che avviene nell'effetto termoionico. L'energia necessaria ad abbandonare il catodo, indicata come *funzione lavoro* W , deve evidentemente essere fornita agli elettroni dalla radiazione incidente. Ma secondo l'elettromagnetismo classico l'energia della radiazione non dipende dalla lunghezza d'onda. In altri termini, con una sorgente di radiazione abbastanza intensa, si dovrebbe osservare un passaggio di corrente per qualunque valore della lunghezza d'onda. L'esistenza di un effetto di soglia resta inspiegabile.

L'effetto fotoelettrico fu spiegato da Einstein nel 1905 in base all'ipotesi dei quanti di luce, già avanzata in altra forma da Planck cinque anni prima a proposito del problema del corpo nero. Planck aveva proposto di *quantizzare* gli scambi di energia fra radiazione e materia, ipotizzando che essi potessero avvenire soltanto per multipli di un'energia minima, data dal prodotto della costante h (oggi nota come *costante di Planck*) per la frequenza f della radiazione. Einstein estende l'ipotesi di Planck, proponendo di quantizzare la radiazione stessa e di considerarla come composta di *quanti di luce* aventi energia hf . Indicheremo questi quanti con il nome di *fotoni*, assegnato loro soltanto in seguito. Ogni fotone ha quindi un'energia:

$$E_f = hf = \frac{hc}{\lambda}. \quad (11)$$

Einstein propose il seguente modello. Quando un fotone colpisce un elettrodo nel metallo che costituisce il catodo, gli cede la propria energia hf . Se la frequenza del fotone è troppo bassa (ovvero, se la lunghezza d'onda è troppo alta), l'energia ceduta all'elettrone è inferiore a W e l'elettrone resta confinato nel metallo, dove negli urti con il reticolo cristallino perde immediatamente l'energia acquistata. Se invece f è uguale o superiore a una frequenza di soglia f_0 (ovvero, se λ è uguale o inferiore a $\lambda_0 = c/f_0$) l'elettrone acquista un'energia almeno sufficiente a lasciare il metallo e a muoversi nel campo elettrico esterno stabilito dalla pila. La condizione che determina λ_0 è allora semplicemente:

$$W = \frac{hc}{\lambda_0}. \quad (12)$$

L'effetto fotoelettrico è sfruttato in diversi dispositivi, fra cui le *cellule fotoelettriche* impiegate come interruttori sensibili alla luce nei circuiti che regolano

l'apertura di cancelli automatici o l'attivazione di sistemi di allarme. Quando la radiazione che illumina il catodo viene intercettata da un oggetto di passaggio, la corrente nel circuito si interrompe. La variazione di corrente può essere utilizzata come segnale che attiva il servomeccanismo di apertura di un cancello.

Per il principio di conservazione dell'energia, l'energia che l'elettrone possiede appena al di fuori del catodo deve essere uguale all'energia ceduta dal fotone, diminuita dell'energia W necessaria ad abbandonare il metallo e, eventualmente, dell'ulteriore energia persa per collisioni con gli atomi del metallo. L'energia che un elettrone possiede dopo essere sfuggito al metallo è quindi al più uguale a:

$$E_e = E_f - W. \quad (13)$$

Nelle ipotesi del testo $\lambda = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ e $\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Il valore della costante di Planck nel Sistema Internazionale è $6,626 \text{ J} \cdot \text{s}$ (forse è ragionevole ipotizzare che l'estensore della prova preveda che il commissario possa fornire esplicitamente questo valore, come pure quello della velocità della luce nel vuoto, se il candidato non li ricorda a memoria). Sostituendo nella (13) le espressioni (11) e (12), otteniamo:

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0} = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) = \\ &= 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot 10^{-7} \text{ m}} - \frac{1}{6 \cdot 10^{-7} \text{ m}} \right) = \\ &= 1,66 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \end{aligned} \quad (14)$$

Poiché $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, l'energia così determinata vale:

$$E_e = 1,03 \text{ eV}.$$

ESAMI DI MATURITÀ SCIENTIFICA
SPERIMENTALE 1998
Corsi Brocca a indirizzo Scientifico

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Quesito 1

Un pennello di luce monocromatica emessa da un laser illumina perpendicolarmente una doppia fenditura praticata in uno schermo A. La distanza tra le due fenditure sia 0,1 mm.

Al di là della doppia fenditura e a una distanza di 2 m da A è disposto, parallelamente ad A, uno schermo B su cui si raccoglie la luce proveniente dalle due fenditure.

Calcolare la lunghezza d'onda della luce emessa dal laser se la distanza su B della frangia centrale luminosa dalla prima frangia laterale luminosa è di 10 mm.

Se il laser illumina una placca di cesio (frequenza di soglia per effetto fotoelettrico $\nu_0 = 4,34 \cdot 10^{14}$ Hz), si ha emissione di elettroni?

[massa dell'elettrone $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, carica dell'elettrone $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, costante di Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s, velocità della luce $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s]

Quesito 2

Il nucleo di un atomo di torio di massa 232,03714 *amu* (*atomic mass unit*, 1 *amu* = $1,6606 \cdot 10^{-27}$ kg) decade in un nucleo di radio di massa 228,02873 *amu* ed in una particella α di massa 4,00260 *amu*.

Determinare la massa che si trasforma in energia cinetica e – supposto in prima approssimazione che tutta l'energia cinetica sia acquisita dalla particella α – la velocità v con cui la particella α esce dalla disintegrazione.

Tale particella può considerarsi relativistica?

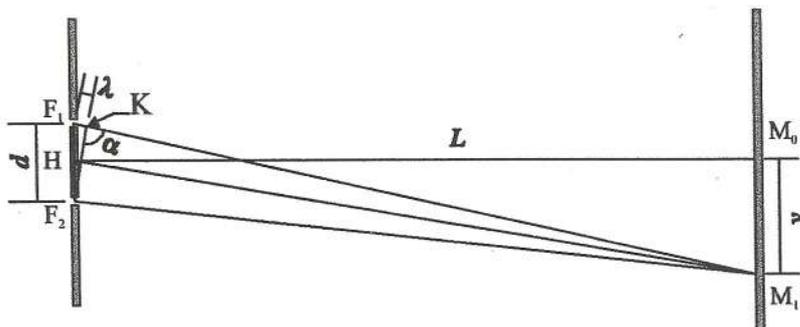
Quale deve essere l'intensità di un campo magnetico ortogonale alla velocità v perché la particella descriva una circonferenza di diametro 1 m supposto che la particella si muova nel vuoto?

[carica dell'elettrone $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, velocità della luce $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s]

La soluzione

Quesito 1

La situazione può essere illustrata con lo schema seguente:



I due cammini ottici $\overline{F_1M_1}$ e $\overline{F_2M_1}$ differiscono esattamente di una lunghezza d'onda, dato che M_1 è la prima frangia laterale luminosa, cioè è un massimo di interferenza. Il triangolo KM_1F_2 è quindi un triangolo isoscele. Se $L \gg d$, l'angolo in M_1 è molto piccolo, l'angolo α è con ottima approssimazione retto. Con lo stesso grado di approssimazione, il triangolo rettangolo HM_0M_1 è simile al triangolo (quasi) rettangolo F_2KF_1 . Inoltre, se $L \gg y$ il cateto L del primo rettangolo è approssimativamente uguale all'ipotenusa $\overline{OM_1}$. Le condizioni su L da noi poste sono soddisfatte nel caso discusso nel testo. Possiamo perciò scrivere:

$$\lambda : d = y : L$$

e infine ricavare un'espressione per la lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{d \cdot y}{L} = \frac{0,1 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm}}{2 \text{ m}} = 0,500 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 500 \text{ nm}. \quad (1)$$

Si tratta di un laser blu-verde.

Ripetiamo qui quanto già detto nella discussione della prova relativa all'Esame del 1995: poiché i dati numerici vengono forniti come se si trattasse di valori puramente matematici, senza alcuna indicazione della precisione sperimentale, non è possibile indicare un procedimento ben fondato per determinare il numero di cifre significative con cui fornire il risultato dei calcoli. Ci siamo attenuti anche in questo caso alla regola approssimativa di assumere all'incirca tre cifre significative di precisione nei risultati.

La frequenza del laser in esame risulta:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{500 \text{ nm}} = 6,00 \cdot 10^{14} \text{ Hz}. \quad (2)$$

Poiché ν è maggiore della frequenza di soglia ν_0 per effetto fotoelettrico del cesio, si ha effettivamente emissione di elettroni nel caso che il laser illumini una placca di questo metallo.

Osserviamo che per rispondere al quesito non abbiamo fatto uso di tre dei dati forniti in calce al testo, vale a dire la massa e la carica dell'elettrone e la costante

di Planck. Naturalmente, non è certo un errore fornire più dati del necessario, anche se questo non avrà mancato di confondere le idee ad alcuni candidati. Avanziamo l'ipotesi che l'estensore della prova avesse avuto all'inizio l'intenzione di porre un'ulteriore richiesta, quella di calcolare l'energia cinetica massima degli elettroni emessi dalla placca. In tal caso, infatti, i tre dati sarebbero risultati necessari. Potete leggere a questo proposito la discussione del secondo Tema nella prova relativa all'Esame del 1997.

Quesito 2

NOTA. Il testo originale parlava di un atomo di uranio che decade in un atomo di plutonio. Si trattava di un errore: poiché il plutonio ha numero atomico 94 e l'uranio 92, un decadimento α , che abbassa di due unità il numero atomico, non può evidentemente trasformare un nucleo di uranio in uno di plutonio.

Il decadimento (ricordiamo che una particella α non è altro che un nucleo di elio)



comporta, come tutte le reazioni nucleari spontanee, un *difetto di massa* Δm per cui la massa totale dei prodotti risulta *minore* della massa del nucleo instabile presente all'inizio. Questo implica che il sistema possa liberare energia (sotto forma di energia cinetica dei prodotti) attraverso il decadimento, motivo per cui il decadimento stesso avviene appunto spontaneamente. L'energia liberata è legata al difetto di massa dalla relazione di Einstein:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2. \quad (4)$$

È importante sottolineare che anche in una reazione chimica, come la scomposizione di una molecola instabile in due o più prodotti, è presente un difetto di massa. In tal caso, però, esso è di un'entità così limitata da non essere misurabile sperimentalmente. Nelle reazioni nucleari, invece, le energie coinvolte sono molto più alte e il difetto di massa è apprezzabile.

Nel nostro caso il difetto di massa è:

$$\begin{aligned} \Delta m &= m_{\text{Th}} - (m_{\text{Ra}} + m_{\text{He}}) = \\ &= 232,03714 \text{ amu} - (228,02873 \text{ amu} + 4,00260 \text{ amu}) = \\ &= 0,00581 \text{ amu} = 9,65 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \end{aligned} \quad (5)$$

per cui l'energia liberata è:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 9,65 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \cdot (3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 8,68 \cdot 10^{-13} \text{ J}. \quad (6)$$

Si tratta di un'energia molto elevata se paragonata a quella implicata da una reazione chimica. La ionizzazione di un atomo di idrogeno, ad esempio, richiede un'energia pari a circa $2 \cdot 10^{-18} \text{ J}$, circa sei ordini di grandezza inferiore alla (6).

Il testo chiede di ipotizzare che tale energia si manifesti come energia cinetica della sola particella α . Questo naturalmente non può essere del tutto vero, perché ciò implicherebbe che il nucleo di radio sia fermo dopo il decadimento, violando così il principio di conservazione della quantità di moto. In effetti, una

trattazione relativistica più accurata mostra che il nucleo di radio possiede un'energia di rinculo pari a circa il 2% dell'energia (6). In prima approssimazione, comunque, l'ipotesi proposta dal testo è pienamente accettabile.

L'energia di riposo della particella α vale $m_{\text{He}} \cdot c^2 = 5,98 \cdot 10^{-10}$ J. Poiché tale energia è molto maggiore dell'energia cinetica acquistata dalla particella, essa non deve considerarsi relativistica. Siamo quindi autorizzati a determinare la sua velocità a partire dall'espressione non relativistica dell'energia cinetica:

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta E}{m_{\text{He}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,68 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{6,65 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 1,62 \cdot 10^7 \text{ m/s.} \quad (7)$$

Tale velocità è pari a circa il 5% della velocità della luce, e ciò legittima a posteriori la nostra trattazione non relativistica. In effetti, la trattazione relativistica porta praticamente allo stesso valore, con una piccola differenza sulla terza cifra decimale.

Nella discussione del primo tema della prova d'Esame relativa all'anno 1996 abbiamo ricavato la relazione

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

fra la forza di Lorentz e la forza centripeta su una particella di massa m , carica q e velocità \vec{v} che descrive una traiettoria circolare di raggio r in una regione dove esiste un campo magnetico uniforme \vec{B} perpendicolare a \vec{v} .

A partire da questa relazione possiamo ricavare l'intensità di \vec{B} a partire dalle ipotesi del testo:

$$B = \frac{m \cdot v}{q \cdot r} = \frac{6,65 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 1,62 \cdot 10^7 \text{ m/s}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,5 \text{ m}} = 672 \text{ mT.} \quad (8)$$

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
1999
Indirizzo Scientifico-Tecnologico Progetto Brocca

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Il candidato svolga una breve relazione su uno solo dei seguenti temi, a sua scelta.

Tema 1

Si vuole determinare il rapporto e/m , tra carica e massa di un elettrone, utilizzando un tubo contenente neon a bassa pressione al cui interno gli elettroni sono emessi per effetto termoelettronico (conosciuto anche come effetto termoionico).

Essi hanno una velocità iniziale trascurabile e sono accelerati tra due elettrodi da una differenza di potenziale $\Delta V = 0,78 \text{ kV}$ fino a raggiungere la velocità v . Gli atomi di neon ne rendono visibile la traiettoria interagendo al loro passaggio.

Una volta raggiunta la velocità v , gli elettroni entrano in una zona che è sede di un campo magnetico con $B = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ e con un angolo α tra i vettori \vec{B} e \vec{v} .

Il candidato:

1. descriva e spieghi l'effetto termoelettronico;
2. spieghi perché gli atomi di neon nel tubo rendono visibile la traiettoria degli elettroni;
3. disegni e commenti la possibile traiettoria di un elettrone tra due elettrodi (prima che risenta del campo magnetico) e poi all'interno del campo magnetico per $\alpha = 90^\circ$ e per $\alpha < 90^\circ$;
4. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare la velocità dell'elettrone in funzione della d.d.p. tra gli elettrodi in un tubo sotto vuoto; calcoli tale velocità ricordando che la carica e la massa dell'elettrone sono $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ e $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
5. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare il raggio della traiettoria in funzione della velocità dell'elettrone e dell'induzione magnetica; calcoli il raggio di tale traiettoria sapendo che l'angolo tra i vettori \vec{B} e \vec{v} è $\alpha = 60^\circ$;

6. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare il rapporto e/m in funzione dei valori misurabili ΔV , B e r .

Tema 2

Un condensatore è un sistema elettrico costruito in modo tale da avere una grande capacità. Più condensatori possono essere collegati fra loro per aumentare o diminuire la capacità complessiva disponibile.

Il candidato:

1. definisca la grandezza fisica "capacità elettrica" di un conduttore, la sua unità di misura nel sistema S.I. e i suoi sottomultipli;
2. calcoli il raggio di un'ipotetica sfera conduttrice che abbia la capacità di un farad e commenti il risultato; come dato di riferimento prenda il raggio medio della Terra di 6370 km;
3. descriva la struttura di un condensatore piano spiegando perché essa permette d'aumentare, per quanto possibile, la capacità elettrica del sistema;
4. ricavi e commenti la formula per calcolare la capacità elettrica di un condensatore piano;
5. descriva almeno un'utilizzazione del condensatore in ambito scientifico o tecnologico;
6. disegni i simboli grafici di tre condensatori da $100 \mu\text{F}$ collegati in modo da ottenere le capacità complessive di $150 \mu\text{F}$ e di $300 \mu\text{F}$.

Il candidato risolva, infine, il seguente problema.

Un sistema di condensatori avente la capacità complessiva di 1 mF , a cui è applicata la d.d.p. di 10 kV , è fatto scaricare su un resistore con $R = 100 \Omega$ immerso in un litro d'acqua distillata alla temperatura di 20°C e contenuta in un recipiente isolato termicamente.

Il candidato calcoli la temperatura finale dell'acqua dopo che il sistema di condensatori si è completamente scaricato e spieghi che cosa succederebbe se si fosse raddoppiato il valore della resistenza.

La soluzione

Tema 1

1.

L'espressione *effetto termoelettronico* indica il fenomeno consistente nell'emissione di elettroni da parte di un catodo portato a una temperatura sensibilmente superiore alla temperatura ambiente. Consideriamo un tubo a vuoto con due elettrodi connessi ai poli di una batteria in serie con un amperometro. In condizioni normali, l'amperometro non indica il passaggio di alcuna corrente, o al più di una debole corrente di scarica dovuta al gas residuo nel tubo. Se però il catodo viene riscaldato, ad esempio facendovi passare la corrente di un circuito secondario, si osserva il passaggio di una corrente tanto più intensa quanto più è elevata la temperatura del catodo.

L'effetto termoelettronico è facilmente spiegabile in termini classici ricordando che, aumentando la temperatura, aumenta l'energia cinetica media delle particelle che costituiscono il metallo e in particolare degli elettroni. Aumenta di conseguenza la percentuale di elettroni veloci, con un'energia almeno sufficiente a vincere l'attrazione elettrostatica da parte del reticolo cristallino e ad uscire dal catodo. Una volta all'esterno del metallo, la differenza di potenziale applicata dalla batteria accelera gli elettroni verso l'anodo, in modo che essi vanno a costituire una corrente misurabile.

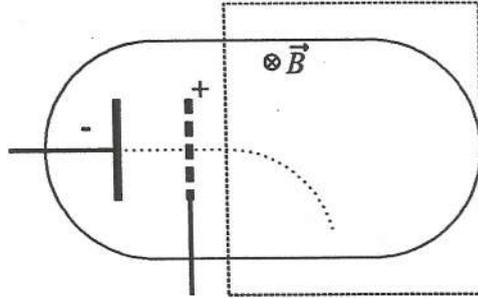
2.

Se nel tubo discusso in precedenza è presente del neon a bassa pressione, gli elettroni accelerati verso l'anodo urteranno gli atomi di neon al loro passaggio. Nell'urto fra un elettrone e un atomo di neon, l'energia dell'elettrone libero sarà ceduta in parte a uno degli elettroni più esterni dell'atomo di neon, il quale si porterà allora su un livello energetico più alto. Dopo un brevissimo intervallo di tempo, l'elettrone tornerà al livello energetico più basso, emettendo un fotone di energia hf pari alla differenza di energia fra i due livelli.

In altri termini, gli atomi di neon emetteranno luce al passaggio degli elettroni, permettendo così di individuarne la traiettoria (nei limiti in cui il concetto di traiettoria è applicabile a un elettrone).

3.

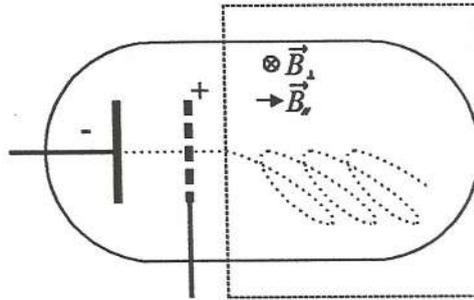
La traiettoria di un elettrone nel primo caso ($\alpha = 90^\circ$) è immediata. L'elettrone ha una traiettoria rettilinea fra i due elettrodi (a rigore, l'elettrone cade anche nel campo gravitazionale terrestre; ma il moto è così rapido che la traiettoria non fa in tempo a mostrare deviazioni dal percorso rettilineo). Quando l'elettrone entra nel rettangolo tratteggiato che è sede del campo \vec{B} (perpendicolare al piano del foglio), la forza di Lorentz fa sì che assuma una traiettoria circolare. Nel disegno che segue abbiamo tracciato la traiettoria dell'elettrone (o parte di essa) con una linea punteggiata.



Nel secondo caso ($\alpha < 90^\circ$) la situazione è più complessa, e la analizzeremo esclusivamente nel caso non relativistico $v \ll c$.

Ipotizziamo che il campo \vec{B} abbia due componenti, una \vec{B}_\perp perpendicolare al piano del foglio, l'altra \vec{B}_\parallel parallela alla direzione iniziale dell'elettrone. Scomponiamo il moto dell'elettrone in due moti indipendenti e sovrapposti, il primo con velocità \vec{v}_\perp perpendicolare a \vec{B} e il secondo con velocità \vec{v}_\parallel parallela ad esso. Mentre il secondo moto si manterrà invariato sotto l'azione del campo magnetico, il primo si trasformerà in un moto circolare uniforme. La sovrapposizione dei due moti darà luogo pertanto a una traiettoria elicoidale con asse parallelo a \vec{v}_\parallel e quindi a \vec{B} .

Il disegno non è semplice da realizzare. L'elica, nelle nostre ipotesi, ci appare di scorcio, poiché \vec{B} è inclinato rispetto al piano del disegno.



Non possiamo fare a meno di chiederci se è davvero questa la situazione che l'estensore della prova aveva in mente di sottoporre ai candidati. La ragione di dubitare ci è data dal punto 5. del tema, dove si parla di "raggio della traiettoria". Che cosa si deve intendere per "raggio" di una traiettoria elicoidale? Il raggio del cilindro intorno al quale l'elica risulta avvolta? La risposta non è affatto ovvia. Per di più, il raggio inteso in questa accezione è proprio ciò che occorre misurare per determinare il rapporto e/m , come nel punto 6. si richiede esplicitamente. Ora, se si vuole misurare tale raggio, è certamente preferibile avere a che fare con una traiettoria piana piuttosto che con una traiettoria elicoidale: non si vede perché lo sperimentatore dovrebbe porsi in una situazione così scomoda, quando l'introduzione di un campo \vec{B} perpendicolare alla velocità iniziale degli elettroni consente misure molto più agevoli.

4.

La presenza di una differenza di potenziale ΔV accelera gli elettroni che emergono dal catodo. L'energia potenziale elettrostatica del sistema diminuisce, mentre aumenta l'energia cinetica degli elettroni:

$$-\Delta E_p = \Delta K$$

che per un singolo elettrone si scrive:

$$e\Delta V = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

dove si è trascurata la velocità iniziale v_0 degli elettroni.

La velocità finale v degli elettroni risulta

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,78 \cdot 10^3 \text{ V}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 1,6 \cdot 10^7 \text{ m/s.} \quad (2)$$

Poiché $v \ll c$, la nostra trattazione non relativistica è giustificata.

5.

Rimandiamo il lettore ai nostri commenti alla fine della trattazione del punto 3., a proposito dell'espressione "raggio della traiettoria".

Supponendo che per raggio si intenda quello del cilindro intorno al quale è avvolta l'elica, ricordiamo che esso non è altro che il raggio del moto circolare uniforme relativo alla componente \vec{v}_\perp della velocità. Per questo moto, la forza di Lorentz svolge il ruolo di forza centripeta. Possiamo scrivere:

$$e v_\perp B = m \frac{v_\perp^2}{r} \quad (3)$$

Ricavando r e osservando che $v_\perp = v \sin(\alpha)$ otteniamo:

$$r = \frac{m v \sin(\alpha)}{e B} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,6 \cdot 10^7 \text{ m/s} \cdot \sin(60^\circ)}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ T}} = 0,18 \text{ m.} \quad (4)$$

6.

Facciamo notare che se si vuole un'espressione che dipenda dalle grandezze sperimentalmente misurabili, nell'elenco di queste occorre comprendere l'angolo α . Di nuovo, il legame fra il tema e la cornice sperimentale proposta non ci sembra del tutto risolto.

Sostituendo nella (4) l'espressione della velocità data dalla (2) e elevando al quadrato otteniamo

$$r^2 = \frac{2 m \Delta V [\sin(\alpha)]^2}{e B^2}$$

e risolvendo per il rapporto e/m richiesto abbiamo infine:

$$\frac{e}{m} = \frac{2 \Delta V [\sin(\alpha)]^2}{r^2 B^2} \quad (5)$$

Tema 2

1.

La *capacità elettrica* C di un conduttore carico isolato è definita come il rapporto fra la carica totale Q_T presente sul conduttore e il potenziale elettrico V al quale si trova il conduttore:

$$C = \frac{Q_T}{V}. \quad (6)$$

Di conseguenza le dimensioni fisiche della capacità sono quelle di una carica divisa per una tensione, ovvero di una carica al quadrato divisa per un'energia. L'unità di misura nel Sistema Internazionale è il *farad*, definito in modo che

$$1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}} = \frac{1 \text{ A} \cdot 1 \text{ s}}{1 \text{ J}/(1 \text{ A} \cdot 1 \text{ s})} = \frac{(1 \text{ A})^2 \cdot (1 \text{ s})^2}{1 \text{ kg} \cdot (1 \text{ m})^2 / (1 \text{ s})^2} = \frac{(1 \text{ A})^2 \cdot (1 \text{ s})^4}{1 \text{ kg} \cdot (1 \text{ m})^2}. \quad (7)$$

Com'è noto, e come si vedrà esplicitamente in seguito, il farad è un campione di capacità di dimensioni troppo elevate per essere di uso pratico. Per questo risultano importanti i suoi sottomultipli, definiti come previsto dal Sistema Internazionale:

$$\begin{aligned} 1 \text{ millifarad} &= 1 \text{ mF} = 10^{-3} \text{ F} \\ 1 \text{ microfarad} &= 1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F} \\ 1 \text{ nanofarad} &= 1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F} \\ 1 \text{ picofarad} &= 1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}. \end{aligned}$$

Il concetto di *capacità elettrica* di un sistema è stato costruito storicamente in analogia con il concetto di *capacità* di un *recipiente* e di *capacità termica*. In tutti questi casi, infatti, entra in gioco la relazione fra "qualcosa" che viene fornito al sistema e il *livello* a cui si porta il sistema in conseguenza di ciò. Nel caso di un recipiente, parliamo di un fluido e del livello da esso raggiunto nel recipiente. Nel caso della *capacità termica*, parliamo dell'energia termica fornita al sistema e del livello termico, cioè della *temperatura*, da esso raggiunta. Nel caso della *capacità elettrica*, si tratta della carica elettrica e del livello elettrico, cioè del *potenziale*.

Poiché i primi modelli fisici tanto dell'energia termica che della quantità di carica sono stati quelli di un particolare *fluido*, è facile osservare che l'analogia sottesa al termine di "capacità" non è affatto casuale dal punto di vista storico.

2.

La *capacità elettrica* di una sfera conduttrice carica isolata e in equilibrio, di raggio R , può essere determinata calcolando il potenziale V a cui essa si trova.

La sfera è un conduttore all'equilibrio; di conseguenza, il campo elettrico al suo interno dev'essere nullo ovunque, altrimenti i portatori di carica si metterebbero in moto, contro l'ipotesi dell'equilibrio. Sulla superficie della sfera, per lo stesso motivo, il campo elettrico dev'essere normale alla superficie. Così, se immaginassimo di spostare una carica infinitesima da un punto all'altro della sfera, il campo elettrico non eseguirebbe su di essa alcun lavoro. Poiché la differenza di potenziale fra due punti è data appunto dal lavoro elettrico compiuto

spostando da uno all'altro una carica di prova, concludiamo che il potenziale deve essere lo stesso in tutti i punti della sfera.

Per il teorema di Gauss, il flusso del campo elettrico su una qualsiasi superficie chiusa interna alla sfera deve risultare proporzionale alla carica elettrica racchiusa dalla superficie. Ma, per quanto detto sopra, tale flusso risulta identicamente nullo per qualunque superficie. Di conseguenza, all'interno della sfera non troveremo alcuna carica elettrica non equilibrata. In altri termini, la carica elettrica depositata sulla sfera deve distribuirsi sulla superficie di questa.

Determiniamo il potenziale elettrico al centro della sfera. Ogni carica infinitesima dq posta sulla superficie della sfera può essere trattata come una carica puntiforme, che genera a distanza R , cioè nel centro della sfera, un potenziale infinitesimo

$$dV(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R}$$

Sommando tutti questi contributi, e ricordando che R ha lo stesso valore per ciascuno di essi, otteniamo il potenziale

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_T}{R} \quad (8)$$

che coincide, in maniera niente affatto casuale, con il potenziale che la carica Q_T genererebbe sulla superficie della sfera se fosse concentrata nel suo centro.

Come abbiamo già detto, questo valore del potenziale è lo stesso in tutti i punti della sfera e può quindi essere considerato come il potenziale della sfera. Per la definizione (6) otteniamo la seguente espressione della capacità di una sfera:

$$C = \frac{Q_T}{V} = Q_T \cdot 4\pi\epsilon_0 \frac{R}{Q_T} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (9)$$

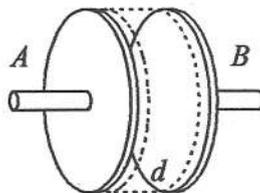
Se $C = 1 \text{ F}$ abbiamo:

$$R = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1 \text{ F}}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}} = 8,988 \cdot 10^9 \text{ m.}$$

Come si vede, si tratta di una sfera il cui raggio è di tre ordini di grandezza maggiore di quello della Terra.

3.

Un condensatore piano è costituito da due superfici conduttrici piano (dette *armature*) di area S e affacciate a una distanza x . Lo spazio fra le armature A e B è per lo più riempito da un dielettrico d .

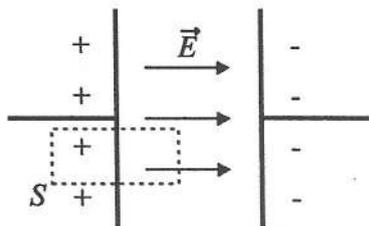


Se depositiamo una carica positiva $+Q$ sull'armatura A , l'altra armatura, se collegata a terra, si carica per induzione assumendo una carica negativa $-Q$. I due conduttori non sono evidentemente isolati, per cui il potenziale a cui si trova ciascuno di essi dipende dalla presenza dell'altro conduttore. Piuttosto che parlare di potenziale di ciascuna delle armature, è conveniente parlare della *differenza di potenziale* ΔV fra di esse. La capacità di un condensatore è infatti definita come il rapporto fra la carica presente su un'armatura e la *differenza di potenziale* fra le armature.

Il testo chiede di spiegare perché un condensatore piano "permette d'aumentare, per quanto possibile, la capacità elettrica del sistema". Non è del tutto chiaro che cosa l'estensore abbia in mente. Ma, in ogni caso, ci sembra più opportuno discutere questo punto contestualmente al prossimo e a partire dall'espressione analitica della capacità di un condensatore piano.

4.

Per determinare il campo elettrico generato da *una* armatura, applichiamo il teorema di Gauss alla superficie cilindrica S (rappresentata di taglio nel disegno qui sotto).



Nel seguito, supporremo che la distanza fra le armature sia molto minore delle dimensioni delle armature stesse. Ciò comporta che, per i punti lontani dal bordo, gli effetti di bordo siano molto limitati, e il campo appaia come quello di una distribuzione piana di carica praticamente infinita. Per motivi di simmetria, il campo deve avere due proprietà importanti:

1. deve essere perpendicolare alla superficie dell'armatura;
2. deve avere la stessa intensità su entrambe le facce dell'armatura, a distanze uguali da essa, e deve essere rivolto in versi opposti.

Il flusso di tale campo attraverso il cilindro S è fatto di due contributi: il flusso attraverso la superficie laterale e quello attraverso le due superfici di base. Per il punto 1. indicato sopra, il primo contributo è nullo, perché il campo è dappertutto tangente alla superficie laterale del cilindro. Per il punto 2., il flusso totale è pari al doppio del flusso attraverso una delle due basi del cilindro. Tale flusso vale:

$$\Phi_S(\vec{E}) = 2 \Phi_{base}(\vec{E}) = 2 \vec{E} \circ \vec{A} = 2 E \cdot A \quad (10)$$

dove A è l'area di base di S , ed è anche l'area intercettata da S sull'armatura. Per il teorema di Gauss, il flusso totale attraverso S dev'essere uguale alla carica

totale racchiusa da S divisa per la costante dielettrica del mezzo:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_T}{\epsilon} = \frac{\sigma A}{\epsilon} \quad (11)$$

dove σ è la densità superficiale di carica sull'armatura.

Confrontando la (10) e la (11) otteniamo l'espressione del campo elettrico di un'armatura:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon}. \quad (12)$$

Si tratta di un campo *indipendente dalla distanza dalle armature*. Nei limiti delle ipotesi da noi poste, e dunque per distanze dall'armatura piccole rispetto all'armatura stessa, e per punti non troppo vicini al bordo, il campo generato da un'armatura ha lo stesso valore in tutti i punti.

Sovrapponiamo ora i campi generati dalle due armature. All'esterno del condensatore i campi hanno verso opposto (ricordiamo che il campo dell'armatura positiva è *uscende* da essa, mentre il campo dell'armatura negativa è *entrante* in essa) ma uguale direzione e intensità: la loro somma è pertanto uguale a zero. All'interno del condensatore, invece, i versi dei due campi sono concordi, per cui i campi si sommano. Il campo totale è perciò confinato all'interno del condensatore e ha ivi intensità σ/ϵ uniforme.

Per determinare la differenza di potenziale fra le armature, ricordiamo la definizione:

$$\Delta V_{AB} = - \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s} \quad (13)$$

che in questo caso, andando dall'armatura negativa a quella positiva (ricordiamo che x rappresenta la distanza fra le armature), diventa:

$$\Delta V = -(\vec{E} \circ \Delta\vec{s}) = -(-E x) = E x = \frac{\sigma x}{\epsilon} = \frac{Q x}{\epsilon S}. \quad (14)$$

La capacità del condensatore risulta pertanto:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon S}{x}. \quad (15)$$

L'espressione (15) ci permette di capire quali fattori influenzano la capacità di un condensatore. In primo luogo, la presenza di un dielettrico fra le armature aumenta il valore della capacità di un fattore pari alla costante dielettrica relativa ϵ_r del mezzo interposto. In effetti, il dielettrico fra le armature cariche risulta polarizzato, con un campo elettrico dovuto alla polarizzazione rivolto in verso *opposto* a quello delle armature. Ciò va a diminuire il campo elettrico totale e quindi la differenza di potenziale fra le armature, permettendo di immagazzinare su di esse più carica elettrica a parità di tensione.

In secondo luogo, la capacità risulta tanto maggiore quanto maggiore è il rapporto S/x . Per avere una grande capacità, le armature devono essere le più estese possibile e la distanza che le separa dev'essere la minima possibile. Ciò viene realizzato, in pratica, con fogli conduttori molto sottili, separati da strati di dielettrico spessi poche molecole, e avvolti strettamente su se stessi.

5.

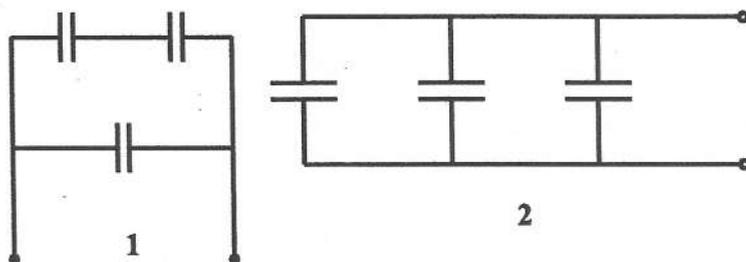
Molte applicazioni dei condensatori sono direttamente legate alla loro natura di *serbatoi di carica elettrica*. In alcune calcolatrici programmabili, ad esempio, un condensatore svolge il ruolo di "generatore di tensione di emergenza". Queste calcolatrici non hanno, ovviamente, memorie di massa simili a un disco fisso, così che i dati e i programmi dell'utente devono essere conservati nella RAM sotto forma di stati di tensione. La tensione necessaria a questo scopo è fornita naturalmente dalle batterie che fanno funzionare la calcolatrice. Quando queste batterie sono esaurite e devono essere sostituite, però, occorre un "dispositivo tampone" che mantenga una tensione sufficiente per il tempo necessario. Questo dispositivo può appunto essere costituito da un condensatore di grande capacità, in grado di mantenere una corretta differenza di potenziale per parecchi minuti a calcolatrice spenta.

6.

È facile dimostrare che la connessione di più condensatori gode delle seguenti proprietà:

1. la connessione di più condensatori in parallelo è equivalente a un unico condensatore, la cui capacità sia uguale alla somma delle capacità dei condensatori;
2. la connessione di più condensatori in serie è equivalente a un unico condensatore, l'inverso della cui capacità sia uguale alla somma degli inversi delle capacità dei condensatori.

In base a ciò, tracciamo gli schemi seguenti, dove tutti i condensatori hanno una capacità di $100\ \mu\text{F}$.



Questi schemi costituiscono la risposta al quesito proposto.

1. Nello schema 1 i due condensatori collegati *in serie* hanno una capacità equivalente di $50\ \mu\text{F}$, così che la loro connessione *in parallelo* con il terzo condensatore ha una capacità equivalente di $150\ \mu\text{F}$.
2. Nello schema 2 i tre condensatori collegati *in parallelo* hanno una capacità equivalente di $300\ \mu\text{F}$.

Problema

Per risolvere il problema proposto, determiniamo l'espressione che fornisce l'energia necessaria a caricare un condensatore fino a una tensione ΔV assegnata. Se sul condensatore è presente una carica q e quindi una differenza di potenziale $\Delta V(q)$, per portare sull'armatura positiva un'ulteriore carica infinitesima dq occorre spendere un'energia $dq \Delta V$. L'energia totale necessaria a caricare il condensatore è pertanto:

$$E = \int_0^Q \Delta V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \Delta V^2. \quad (16)$$

Nel nostro caso tale energia vale

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ mF} \cdot (10 \text{ kV})^2 = 50 \text{ kJ}. \quad (17)$$

Quando il condensatore si scarica sul resistore, l'energia immagazzinata viene spesa per fare passare la corrente in quest'ultimo e viene quindi convertita in energia termica del resistore e dell'acqua per effetto Joule. Trascurando (come è certamente legittimo) la capacità termica del resistore, l'energia termica trasferita all'acqua può essere calcolata con l'espressione:

$$E_{term} = C_{term} \Delta T = c m \Delta T. \quad (18)$$

Per il principio di conservazione dell'energia la (17) e la (18) sono uguali. Ricordando che per l'acqua $c = 4186 \text{ J/(K kg)}$ e $d = 1000 \text{ kg/m}^3$ e risolvendo per ΔT otteniamo:

$$\Delta T = \frac{E_{term}}{c m} = \frac{50 \text{ kJ}}{4186 \text{ J/(K} \cdot \text{kg)} \cdot 1 \text{ kg}} = 12 \text{ K} = 12 \text{ }^\circ\text{C}. \quad (19)$$

La temperatura finale dell'acqua risulta di $32 \text{ }^\circ\text{C}$. Facciamo notare che questo risultato non dipende affatto dal valore della resistenza. Se R raddoppiasse, la costante di tempo $\tau = RC$ del circuito di scarica raddoppierebbe anch'essa e la scarica si svolgerebbe più lentamente, ma la temperatura finale dell'acqua avrebbe lo stesso valore.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
2000
Indirizzo Scientifico Progetto Brocca

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Il candidato svolga una breve relazione su uno solo dei seguenti temi, a sua scelta.

Tema 1

Nella prima metà del secolo XX, dopo la scoperta che la radiazione elettromagnetica ha un comportamento duale, ondulatorio e corpuscolare, fu formulata l'ipotesi che anche la materia, considerata composta da particelle, potesse presentare caratteristiche ondulatorie.

Il candidato:

- spieghi il significato dell'espressione "*la radiazione ha un comportamento duale, ondulatorio e corpuscolare*" e descriva un esperimento che ha messo in evidenza il comportamento corpuscolare;
- spieghi il significato dell'espressione "*fu formulata l'ipotesi che la materia, considerata composta da particelle, potesse presentare caratteristiche ondulatorie*" e descriva un esperimento che ha confermato la realtà di questa ipotesi teorica;
- calcoli quanti fotoni emette in un minuto una stazione radio che trasmette musica alla frequenza di 99 MHz con una potenza di uscita di 20 kW;
- calcoli la lunghezza d'onda associata ad un elettrone che, con velocità iniziale trascurabile, è stato accelerato tra due elettrodi da una differenza di potenziale di 200 V;
- calcoli, in eV, la minima energia cinetica che può avere un elettrone costretto a muoversi in uno spazio unidimensionale lungo 0,1 nm:
 - velocità della luce: $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s;
 - costante di Planck: $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J · s;
 - massa dell'elettrone: $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg;
 - carica dell'elettrone: $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C.

Tema 2

Sono disponibili una pila di forza elettromotrice $f. e. m. = 4,5 \text{ V}$ e due lampadine, A e B , costruite per essere utilizzate con una differenza di potenziale $\Delta V = 4,5 \text{ V}$ e aventi, rispettivamente, le potenze $P_A = 3 \text{ W}$ e $P_B = 5 \text{ W}$.

La pila eroga una corrente di intensità $I = 6 \text{ A}$ se è posta in condizione di cortocircuito per un breve istante.

Il candidato:

- spieghi i concetti di forza elettromotrice di una pila e di differenza di potenziale disponibile ai suoi morsetti, proponendo anche la relazione matematica tra le due grandezze;
- descriva una procedura di laboratorio per misurare ognuna delle due grandezze fisiche;
- tratti il concetto di potenza associato ad una corrente elettrica e ricavi l'espressione della potenza dissipata in una resistenza;
- calcoli la resistenza interna della pila in condizioni di cortocircuito, trascurando la resistenza del filo di collegamento;
- calcoli la potenza dissipata sulle due lampadine quando vengono collegate, separatamente, alla pila;
- calcoli, in percentuale, il rendimento delle due lampadine in rapporto alla loro reale capacità di funzionamento e commenti il risultato indicando quale lampadina ha la luminosità più vicina al valore massimo possibile, in base alle sue caratteristiche, e spiegando il perché.

La soluzione

Tema 1

Carattere duale della radiazione

Forse chiedere allo studente di spiegare il significato di una frase del testo proposto è una scelta che risente un po' troppo dell'impostazione di tanti Temi di Lingua Italiana. Si tratta di una frase che delinea già una certa formulazione e interpretazione della teoria quantistica e delle sue origini storiche. Forse sarebbe stato meglio scegliere un'impostazione che prendesse le mosse dal resoconto di un esperimento, o comunque da una formulazione esplicitamente legata a uno dei protagonisti di quello sviluppo storico, magari con una citazione originale. Una prova di Fisica non dovrebbe esigere dal candidato la capacità di riportare fedelmente una qualche "interpretazione autentica", quasi che si trattasse della parafrasi in prosa di un verso di Dante.

La frase "la radiazione ha un comportamento duale, ondulatorio e corpuscolare" sarà interpretata in maniera differente nel contesto di differenti interpretazioni della teoria quantistica della luce nel suo complesso. Ci limitiamo ad accennare a due interpretazioni particolarmente autorevoli.

- Nell'articolo di Albert Einstein del 1905, "Un punto di vista euristico relativo alla generazione e alla trasformazione della luce" (si tratta dell'articolo che contiene la celebre spiegazione dell'effetto fotoelettrico), la "dualità" del comportamento della luce è vista esplicitamente come legata soltanto a differenti livelli di analisi dei fenomeni luminosi. Einstein scrive:

le osservazioni ottiche si riferiscono a valori medi temporali, e non già a valori istantanei, e nonostante gli esperimenti abbiano pienamente confermato la teoria della diffrazione, della riflessione, della rifrazione, della dispersione e così via, è concepibile che una teoria della luce basata su funzioni spaziali continue porti a contraddizioni con l'esperienza se la si applica ai fenomeni della generazione e della trasformazione della luce [...]. Secondo l'ipotesi che sarà qui considerata, quando un raggio luminoso si propaga, l'energia non si distribuisce in modo continuo in uno spazio via via più grande; essa consiste invece in un numero finito di quanti di energia, localizzati in punti dello spazio, i quali si muovono senza dividersi e possono essere assorbiti e generati solo nella loro interezza.

Come si vede chiaramente, il comportamento della luce non è per Einstein "duale" in sé. Piuttosto, esso appare conforme al modello ondulatorio quando si esaminano medie temporali e spaziali, come nelle comuni esperienze di ottica, ivi compresa l'esperienza della doppia fenditura di Young. Ma se si considera la luce a livello microscopico, questa apparirà inequivocabilmente costituita da corpuscoli localizzati nello spazio. Va ricordato che lo scopo dichiarato da Einstein all'inizio del suo lavoro è appunto quello di risolvere la "profonda differenza formale" fra la descrizione ondulatoria e continua della luce e la descrizione corpuscolare dei corpi materiali.

- Secondo l'impostazione di Bohr, basata sul principio di complementarità, la necessità di descrivere i risultati degli esperimenti nel linguaggio della

fisica classica, che è anche quello dell'esperienza quotidiana, costringe a usare, di volta in volta, i termini del modello corpuscolare o del modello ondulatorio. Lo sperimentatore deve decidere, fin dall'inizio, su quale modello basarsi e deve rinunciare a osservare quei comportamenti che sono descritti in maniera soddisfacente soltanto nel modello complementare. Ogni domanda sul *reale* comportamento della luce è per Bohr priva di senso, perché nessun esperimento potrà rispondere ad essa, così come nessun esperimento potrà mai mettere in evidenza *entrambi* gli aspetti, quello ondulatorio e quello corpuscolare, *nello stesso tempo*.

Ci scusiamo per questa lunga discussione. Speriamo di aver sottolineato adeguatamente le difficoltà anche insidiose implicite nella richiesta del tema. Naturalmente, ci sentiamo di affermare che la risposta del candidato andava valutata in base al contesto complessivo in cui egli aveva appreso le basi della teoria quantistica, senza discriminare fra differenti interpretazioni, ciascuna a suo modo legittima.

Il terreno su cui ci muoviamo è un po' più saldo se affrontiamo la seconda parte della prima richiesta, la descrizione di un esperimento "che ha messo in evidenza il comportamento corpuscolare" della luce. Certo, anche qui occorre chiedersi cosa si debba intendere per "mettere in evidenza". La meccanica quantistica ci mette continuamente di fronte all'impossibilità di separare completamente teoria ed esperimento. Nessun esperimento può mettere in evidenza l'aspetto corpuscolare della luce, se non nel quadro di una teoria dei fenomeni di emissione e assorbimento della luce: non si possono vedere i fotoni!

Un buon esempio di quanto intendiamo dire è proprio l'effetto fotoelettrico e la spiegazione che ne propone Einstein. L'osservazione dell'effetto fotoelettrico da parte di Lenard nel 1902, o meglio, la determinazione che in tale fenomeno l'energia dei fotoelettroni è indipendente dall'intensità della radiazione incidente, non è di per sé una dimostrazione dell'aspetto corpuscolare della luce. Altrimenti, non ci sarebbe stata ragione di assegnare ad Einstein il premio Nobel per l'articolo già citato. L'effetto fotoelettrico diventa una manifestazione dell'aspetto corpuscolare *alla luce* della spiegazione che ne ha offerto Einstein. Avendo sottolineato questo punto importante, riportiamo nel seguito la discussione dell'effetto fotoelettrico già svolta in relazione alla prova d'Esame per l'anno 1997.

L'effetto fotoelettrico può essere messo in evidenza utilizzando un opportuno tubo a vuoto con due elettrodi connessi a una pila che mantiene fra essi una differenza di potenziale assegnata. Poiché i due elettrodi sono isolati, nel circuito così costituito non passa alcuna corrente. Ma se il catodo (l'elettrodo connesso al polo negativo della pila) è costituito da una piastrina metallica, è possibile far passare una corrente nel circuito illuminando il catodo con una sorgente di radiazione elettromagnetica, visibile o ultravioletta. Finché la lunghezza d'onda della radiazione impiegata è *superiore* a un certo valore λ_0 , detto lunghezza d'onda di soglia, nel circuito non si osserva alcuna corrente, qualunque sia l'intensità della sorgente impiegata. La corrente passa soltanto se la radiazione ha una lunghezza d'onda uguale o inferiore a λ_0 .

Dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico, questo è effetto è sconcertante. Se nel circuito si stabilisce una corrente, possiamo ipotizzare che il catodo illuminato emetta elettroni, in maniera simile a quello che avviene nell'effetto termoionico. L'energia necessaria ad abbandonare il catodo, indicata

come *funzione lavoro* W , deve evidentemente essere fornita agli elettroni dalla radiazione incidente. Ma secondo l'elettromagnetismo classico l'energia della radiazione non dipende dalla lunghezza d'onda. In altri termini, con una sorgente di radiazione abbastanza intensa, si dovrebbe osservare un passaggio di corrente per qualunque valore della lunghezza d'onda. L'esistenza di un effetto di soglia resta inspiegabile.

L'effetto fotoelettrico fu spiegato da Einstein nel 1905 in base all'ipotesi dei quanti di luce, già avanzata in altra forma da Planck cinque anni prima a proposito del problema del corpo nero. Planck aveva proposto di *quantizzare* gli scambi di energia fra radiazione e materia, ipotizzando che essi potessero avvenire soltanto per multipli di un'energia minima, data dal prodotto della costante h (oggi nota come *costante di Planck*) per la frequenza f della radiazione. Einstein estende l'ipotesi di Planck, proponendo di quantizzare la radiazione stessa e di considerarla come composta di *quanti di luce* aventi energia hf . Indicheremo questi quanti con il nome di *fotoni*, assegnato loro soltanto in seguito. Ogni fotone ha quindi un'energia:

$$E_f = hf = \frac{hc}{\lambda}. \quad (1)$$

Einstein propose il seguente modello. Quando un fotone colpisce un elettrone nel metallo che costituisce il catodo, gli cede la propria energia hf . Se la frequenza del fotone è troppo bassa (ovvero, se la lunghezza d'onda è troppo alta), l'energia ceduta all'elettrone è inferiore a W e l'elettrone resta confinato nel metallo, dove negli urti con il reticolo cristallino perde immediatamente l'energia acquistata. Se invece f è uguale o superiore a una frequenza di soglia f_0 (ovvero, se λ è uguale o inferiore a $\lambda_0 = c/f_0$) l'elettrone acquista un'energia almeno sufficiente a lasciare il metallo e a muoversi nel campo elettrico esterno stabilito dalla pila. La condizione che determina λ_0 è allora semplicemente:

$$W = \frac{hc}{\lambda_0}. \quad (2)$$

Caratteristiche ondulatorie della materia

Anche questo punto non è esente da difficoltà. Non ripetiamo ciò che abbiamo già detto a proposito della scelta di invitare lo studente a spiegare il significato di una frase del testo. Sottolineiamo invece come l'espressione "un esperimento che ha confermato la realtà di questa ipotesi teorica" sia problematica. Non era meglio parlare di "fondatezza", piuttosto che di realtà? Forse l'estensore desiderava enfatizzare come l'ipotesi in discussione non possa più essere considerata un semplice espediente formale, ma faccia emergere uno specifico elemento di realtà. Ma, ancora una volta, ciò significa privilegiare *una* interpretazione della teoria quantistica, e dare per scontato che tutti i candidati siano stati esposti ad essa e soltanto ad essa.

La frase citata si riferisce evidentemente all'ipotesi di de Broglie, avanzata da questi nel 1923 e poi nella tesi di dottorato del 1924. De Broglie propose di associare a ogni particella di massa a riposo m un "fenomeno periodico interno". Tale fenomeno, in un sistema di riferimento in cui la particella avesse avuto velocità v e quantità di moto p , avrebbe dato origine a un'onda di lunghezza

d'onda

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (3)$$

dove h è la costante di Planck.

Nella formulazione di de Broglie non sono chiarite né la natura del "fenomeno periodico interno" né quella dell'onda associata alla particella. L'ipotesi di tale onda restava allora del tutto arbitraria. Ma immaginiamo che la particella in questione sia un elettrone in moto su un'orbita all'interno di un atomo di idrogeno. Propagandosi lungo l'orbita, l'onda interferirà con se stessa; possiamo assumere quindi che le sole orbite consentite siano quelle che danno luogo a un'interferenza costruttiva dell'onda con se stessa e quindi allo stabilirsi di un'onda *stazionaria*. La condizione perché questo avvenga è che l'orbita dell'elettrone contenga un numero intero di lunghezze d'onda. Per orbite circolari di raggio r

$$2\pi r = n\lambda \quad (4)$$

con n intero qualunque. Facendo uso della (3) otteniamo

$$L = pr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar. \quad (5)$$

La (5) esprime la condizione di quantizzazione di Bohr per orbite circolari, ipotizzata da Bohr nell'articolo del 1913 per spiegare la stabilità della materia e il fenomeno degli spettri a righe. L'ipotesi di de Broglie rappresenta perciò un primo elemento di giustificazione di quella ipotesi e un importante indizio per il programma di ricerca che sarebbe stato portato al successo da Schrödinger nel 1926.

Se ad un elettrone in movimento è necessario associare un'onda, deve essere possibile osservare nel caso degli elettroni i fenomeni associati alla propagazione ondulatoria, in particolare il fenomeno dell'*interferenza*. Ciò avvenne effettivamente grazie a una serie di esperimenti realizzati fra il 1925 e il 1927 da alcuni ricercatori, in particolare da Davisson e Germer. Facendo incidere un fascio di elettroni su un cristallo, i piani di simmetria del cristallo si comportano come un reticolo di diffrazione. Ponendo a una certa distanza dal cristallo una lastra fotografica, su di essa si registra una figura di interferenza, formata da zone chiare alternate a zone scure, del tutto analoga a quella che si ottiene impiegando, invece degli elettroni, una radiazione elettromagnetica costituita da raggi X.

Supponiamo di impiegare elettroni emessi da un tubo catodico e accelerati da una differenza di potenziale dell'ordine di 10^3 V. L'energia cinetica impressa agli elettroni è

$$K = e\Delta V = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^3 \text{ V} \simeq 10^{-16} \text{ J}.$$

La velocità degli elettroni, calcolata come è lecito in maniera non relativistica, risulta

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-16} \text{ J}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \simeq 10^7 \text{ m/s}.$$

La lunghezza d'onda associata a questi elettroni secondo la (3) è

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 10^7 \text{ m/s}} \simeq 10^{-10} \text{ m}$$

un ordine di grandezza confrontabile con quello tipico dei raggi X.

I fotoni emessi da una stazione radio

Secondo l'interpretazione proposta da Einstein, e incorporata nelle successive versioni della teoria quantistica, una radiazione di frequenza f dev'essere considerata composta da *fotoni* (il termine non è di Einstein) di energia hf . Nel caso qui discusso:

$$E_{\text{fotone}} = hf = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 99 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 6,6 \cdot 10^{-26} \text{ J}. \quad (6)$$

In un minuto, la stazione irradia un'energia pari a

$$E_{\text{stazione}} = P \Delta t = 20 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot 60 \text{ s} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ J}. \quad (7)$$

Otteniamo il numero dei fotoni emessi in un minuto dividendo la (7) per la (6):

$$N_{\text{fotoni}} = \frac{E_{\text{stazione}}}{E_{\text{fotone}}} = \frac{1,2 \cdot 10^6 \text{ J}}{6,6 \cdot 10^{-26} \text{ J}} = 1,8 \cdot 10^{31}. \quad (8)$$

La lunghezza d'onda di un elettrone

Abbiamo già svolto un calcolo analogo discutendo l'esperimento di Davisson e Germer. Se un elettrone attraversa una differenza di potenziale ΔV , la sua energia cinetica aumenta di una quantità pari all'energia potenziale elettrica persa dal sistema:

$$\Delta K = -\Delta U = -e \Delta V = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 200 \text{ V} = 3,2 \cdot 10^{-17} \text{ J}. \quad (9)$$

Nell'ipotesi che la velocità iniziale dell'elettrone sia trascurabile rispetto alla sua velocità finale, quest'ultima può essere calcolata come:

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2\Delta K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 8,4 \cdot 10^6 \text{ m/s}. \quad (10)$$

Il valore della velocità finale è compatibile con la trattazione non relativistica da noi adottata, in quanto $v_f \ll c$. Dalla (3) si ricava immediatamente

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 8,4 \cdot 10^6 \text{ m/s}} = 8,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \quad (11)$$

Energia cinetica minima di un elettrone

Se l'elettrone è costretto a muoversi su una retta entro un intervallo di ampiezza Δx , la sua posizione lungo tale coordinata è nota appunto con un'indeterminazione Δx . In base alle relazioni di indeterminazione di Heisenberg possiamo scrivere:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim \hbar. \quad (12)$$

L'indeterminazione minima sulla componente x della quantità di moto risulta perciò

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} / (2 \cdot \pi)}{1 \cdot 10^{-10} \text{ m}} = 1 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}. \quad (13)$$

Poiché

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

l'energia cinetica dell'elettrone è affetta da un'indeterminazione non minore di

$$\Delta K = \frac{\Delta p^2}{2m} = \frac{(1 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s})^2}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 5 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3 \text{ eV}. \quad (14)$$

Facciamo notare che, se l'indicazione per cui l'elettrone è confinato su una retta dovesse essere presa alla lettera, ciò comporterebbe che l'indeterminazione sulla sua posizione lungo gli assi y e z sia nulla.

Tema 2

Forza elettromotrice e differenza di potenziale

Una pila, e in generale un generatore di tensione, forniscono energia ai portatori di carica che circolano nel circuito. Possiamo immaginare che in una pila, a circuito aperto, esista ai due morsetti una certa quantità di carica statica non bilanciata, di segno opposto. Una distribuzione di cariche di questo tipo possiede evidentemente una energia potenziale elettrica, dato che è possibile accelerare i portatori di carica permettendo loro di raggiungere le cariche di segno opposto. Quando si chiude il circuito avviene appunto questo. I portatori di carica (in un circuito con conduttori metallici, come supporremo nel seguito, si tratta di elettroni) si muovono lungo il circuito sotto l'azione del campo elettrico generato dalla distribuzione di cariche: così facendo trasformano energia potenziale in energia cinetica, la quale viene poi trasformata in energia interna dei conduttori negli urti disordinati fra gli elettroni e il reticolo cristallino. L'esistenza nel circuito di una corrente continua attesta il fatto che nuova energia viene continuamente fornita ai portatori di carica.

L'energia viene fornita naturalmente dal generatore, il quale costringe gli elettroni a muoversi dal morsetto positivo a quello negativo *contro* il campo elettrico, fornendo così loro energia potenziale e permettendo il mantenimento della corrente. Con una metafora ben nota, possiamo paragonare il generatore a un montacarichi che solleva degli oggetti pesanti *contro* la forza peso, fornendo loro un'energia potenziale gravitazionale. Sia il montacarichi che il generatore compiono un lavoro, rispettivamente sugli oggetti pesanti e sugli elettroni, ed è proprio questo lavoro che si traduce in energia potenziale. Come nel montacarichi le forze che compiono lavoro *non* sono, in generale, di natura gravitazionale, nel generatore le forze che compiono lavoro sugli elettroni portandoli dal morsetto positivo a quello negativo *non* sono in generale di natura elettrica.

La quantità di lavoro eseguita dal generatore dipende dall'intensità di corrente presente nel circuito, ma il lavoro che il generatore è in grado di compiere sul singolo portatore di carica è una caratteristica intrinseca del generatore. Introduciamo pertanto una grandezza fisica definita come il rapporto fra il lavoro eseguito dal generatore sui portatori di carica *all'interno del generatore* e la carica complessiva che circola in esso:

$$F_{em} = \frac{W}{Q}. \quad (15)$$

Questa quantità ha, per ragioni storiche, il nome di *forza elettromotrice*. Si tratta di una denominazione infelice, perché come abbiamo visto la *f. e. m.* non

è affatto una forza, ma piuttosto un *lavoro specifico*. Possiamo osservare, inoltre, che le dimensioni fisiche della *f. e. m.* sono quelle di un'energia divisa per una carica, ovvero di una differenza di potenziale, per cui l'unità di misura della *f. e. m.* è il volt.

Quando il circuito viene chiuso collegando con dei conduttori i morsetti del generatore, fra tali morsetti è presente una differenza di potenziale ΔV_0 . Questa differenza di potenziale, in generale, non è uguale alla *f. e. m.* del generatore. Il prodotto $Q \Delta V_0$ rappresenta l'energia a disposizione dei portatori di carica per attraversare i conduttori esterni al generatore, mentre il prodotto $Q F_{em}$ rappresenta l'energia messa a disposizione dal generatore *complessivamente*, e in parte utilizzata dai portatori di carica per attraversare il generatore stesso. Più grande è l'intensità della corrente nel circuito, maggiore è l'energia necessaria ad attraversare il generatore e maggiore è quindi la *differenza* fra F_{em} e ΔV_0 . In un circuito dove è stabilita una corrente intensa la differenza di potenziale ai capi del generatore risulta sensibilmente diversa, dunque molto minore, del suo valore nominale, pari alla forza elettromotrice.

Possiamo descrivere questa situazione introducendo un modello del generatore, costituito da una scatola nera *impossibile da aprire*, al cui interno si trovano un generatore ideale e una resistenza, detta *resistenza interna*, posta in serie ad esso. Il generatore ideale fornisce ai *suoi* estremi una differenza di potenziale uguale alla F_{em} e costante, qualunque sia il valore dell'intensità di corrente che scorre nel circuito. Tali estremi, però, non sono accessibili. La differenza di potenziale effettivamente disponibile ai capi della scatola nera risulta minore della F_{em} per una quantità uguale alla caduta di tensione ohmica sulla resistenza interna. In base al modello appena descritto, possiamo scrivere una semplice relazione fra la F_{em} di un generatore e la differenza di potenziale ΔV_0 presente ai suoi capi quando nel circuito è stabilita una corrente di intensità I :

$$\Delta V_0 = F_{em} - r I \quad (16)$$

dove r rappresenta la resistenza interna del generatore. Occorre ricordare, comunque, che la resistenza interna non corrisponde ad alcun resistore reale che sia presente "dentro" il generatore.

Misura della forza elettromotrice di un generatore

Dalla discussione precedente possiamo concludere che la differenza tra la F_{em} di un generatore e la differenza di potenziale ai suoi capi risulta tanto più piccola quanto minore è l'intensità della corrente nel circuito in cui è presente il generatore. Da questo punto di vista, la forza elettromotrice può in effetti essere definita come la differenza di potenziale ai capi del generatore *a circuito aperto*. Questa definizione, però, non può essere applicata alla lettera per misurare la F_{em} : la misura della differenza di potenziale ai capi di un elemento richiede, infatti, di porre in parallelo ad esso un voltmetro; ma ponendo in parallelo al generatore un voltmetro si chiude appunto il circuito e nel voltmetro si stabilisce una corrente (è questa corrente che fa sì che la bobina interna al voltmetro subisca una forza da parte del magnete che l'avvolge e quindi ruoti, spostando l'ago che fornisce appunto la misura del voltmetro).

Comunque, se la corrente erogata è molto bassa, la caduta di tensione *interna al generatore* che compare nella (16) è trascurabile rispetto a ΔV_0 . Adottiamo perciò la soluzione di chiudere il generatore su un resistore di resistenza R_{ext}

molto elevata e di misurare la differenza di potenziale ai capi del resistore. Se $R_{ext} \gg r$, la (16) si può scrivere come

$$F_{em} = \Delta V_0 + r I = R_{ext} I + r I \simeq R_{ext} I. \quad (17)$$

Potenza elettrica

Come abbiamo già ricordato, per stabilire una corrente elettrica in un conduttore è necessario fornire ai portatori di carica un'energia pari a quella che essi perdono negli urti con il reticolo cristallino del conduttore. Per questo motivo, in effetti, ai capi del conduttore si osserva una *caduta di tensione*: la differenza fra il potenziale elettrico al quale si trovano i portatori di carica all'ingresso del conduttore e il potenziale elettrico al quale essi si trovano all'uscita del conduttore misura appunto il rapporto fra l'energia ΔE persa dai portatori di carica e la carica Q da essi trasportata:

$$\Delta V = \frac{\Delta E}{Q}. \quad (18)$$

In un intervallo di tempo Δt nel conduttore scorre una quantità di carica data da:

$$Q = I \Delta t. \quad (19)$$

Confrontando la (18) e la (19) possiamo concludere che l'energia dissipata dai portatori di carica nel conduttore è:

$$\Delta E = Q \Delta V = I \Delta t \Delta V. \quad (20)$$

Questa quantità dipende dall'intervallo di tempo considerato. Introduciamo allora il concetto di *potenza dissipata sul conduttore*, definita come il rapporto fra l'energia dissipata e l'intervallo di tempo in cui ciò avviene. Tale grandezza, il cui valore corrisponde all'energia consumata nell'unità di tempo, risulta indipendente dal tempo:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = I \Delta V. \quad (21)$$

Dobbiamo chiederci che effetti produce questo trasferimento di energia dalla corrente al conduttore. Come abbiamo detto, l'energia è trasferita attraverso urti che avvengono a livello microscopico. L'energia acquistata dal conduttore è quindi un'energia interna, che si manifesta attraverso un *aumento di temperatura* del conduttore stesso. Per effetto della corrente che è presente in esso, il conduttore *si scalda*.

Nel caso di un conduttore ohmico di resistenza R , vale per definizione la legge di Ohm:

$$\Delta V = R I \quad (22)$$

e la (21) prende la forma:

$$P = R I^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R}. \quad (23)$$

Facciamo notare, comunque, che in generale la resistenza che compare in queste espressioni dipende dalla temperatura del conduttore. In un conduttore metallico, ad esempio, la resistenza aumenta con la temperatura. Di conseguenza, nell'applicare le relazioni così ricavate, non si può dare per scontato che R sia semplicemente una costante.

Resistenza interna

Dalla (16) si ricava che, se il generatore viene cortocircuitato mediante un conduttore esterno di resistenza trascurabile rispetto alla resistenza interna, praticamente tutta la tensione cade sulla resistenza interna stessa. In tal caso, infatti, la caduta di tensione sul conduttore esterno può essere trascurata (un voltmetro posto ai suoi capi indicherebbe una tensione praticamente nulla) e si ha

$$F_{em} = r I_{cc}.$$

Se la F_{em} è nota e se la corrente di corto circuito I_{cc} può essere determinata con un amperometro di resistenza interna trascurabile, possiamo misurare in questo modo la resistenza interna. Nel caso proposto dal testo:

$$r = \frac{F_{em}}{I_{cc}} = \frac{4,5 \text{ V}}{6 \text{ A}} = 0,75 \Omega. \quad (24)$$

Potenza dissipata sulle lampadine

Se una lampadina riporta l'indicazione di una potenza P e di una differenza di potenziale ΔV , ciò indica che quando ai suoi capi è presente tale differenza di potenziale, la potenza dissipata dalla lampadina è P . In base alla (23), ciò comporta che in queste condizioni la lampadina presenti una resistenza:

$$R = \frac{(\Delta V)^2}{P} \quad (25)$$

per cui alle lampadine del testo dobbiamo assegnare una resistenza, *in condizioni di massima tensione applicata*, pari a:

$$R_A = \frac{(\Delta V)^2}{P_A} = \frac{(4,5 \text{ V})^2}{3 \text{ W}} = 6,8 \Omega$$
$$R_B = \frac{(\Delta V)^2}{P_B} = \frac{(4,5 \text{ V})^2}{5 \text{ W}} = 4,1 \Omega.$$

Dobbiamo notare che, in condizioni differenti da quelle descritte, la temperatura del filamento delle lampadine sarà in generale diversa e il valore della resistenza varierà anch'esso. Il testo non contiene nessun accenno a questo aspetto, ma esso non può essere semplicemente trascurato. Anche se è vero che non si può dare una risposta alla richiesta del testo senza ipotizzare che R_A e R_B rimangano costanti, questa ipotesi dovrebbe essere esplicitata.

Ciò premesso, osserviamo che, *se le ipotesi fatte sono valide*, la corrente in ciascuna lampadina può essere ricavata dalla (17):

$$I_A = \frac{F_{em}}{R_A + r} = \frac{4,5 \text{ V}}{6,8 \Omega + 0,75 \Omega} = 0,59 \text{ A}$$
$$I_B = \frac{F_{em}}{R_B + r} = \frac{4,5 \text{ V}}{4,1 \Omega + 0,75 \Omega} = 0,92 \text{ A}$$

ottenendo infine i seguenti valori della potenza dissipata:

$$P_{diss A} = R_A (I_A)^2 = 6,8 \Omega \cdot (0,59 \text{ A})^2 = 2,4 \text{ W}$$
$$P_{diss B} = R_B (I_B)^2 = 4,1 \Omega \cdot (0,92 \text{ A})^2 = 3,5 \text{ W}.$$

Rendimento delle lampadine

L'uso del termine "rendimento" in questo contesto è purtroppo marcatamente gergale. Il rendimento è definito in generale come il rapporto fra energia utile sviluppata ed energia totale impiegata. Questo concetto non è qui applicabile. Il testo permette, con un certo sforzo, di concludere che l'estensore richiede il calcolo del rapporto fra la potenza effettivamente sviluppata da ciascuna lampadina e la sua potenza massima. Non si tratta certo di un rendimento nel senso termodinamico del termine. In questa accezione, la lampadina *A* ha un rendimento

$$\frac{P_{diss A}}{P_A} = \frac{2,4 \text{ W}}{3 \text{ W}} = 0,80 = 80\%$$

e la lampadina *B* ha un rendimento

$$\frac{P_{diss B}}{P_B} = \frac{3,5 \text{ W}}{5 \text{ W}} = 0,70 = 70\%.$$

Poiché la lampadina *A* lavora in condizioni più vicine a quelle di massima potenza sviluppata, questa lampadina apparirà più luminosa quando verrà collegata alla pila nel modo discusso.